



TITLE:

グラフ上の跡公式(量子論と古典論  
,ハミルトン力学系とカオス,研究会  
報告)

AUTHOR(S):

白井, 朋之

---

CITATION:

白井, 朋之. グラフ上の跡公式(量子論と古典論,ハミルトン力学系とカ  
オス,研究会報告). 物性研究 1998, 70(4): 490-498

ISSUE DATE:

1998-07-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96410>

RIGHT:

# グラフ上の跡公式

白井 朋之 (京都大・数理研) \*

## 1 Introduction

1次元のシュレーディンガー作用素に対しての散乱問題また逆散乱問題は、ランダムなポテンシャルのあるシュレーディンガー作用素との関連で詳しく調べられており [13], 特にポテンシャルが周期的なときにはある境界条件の下での固有値の系列とポテンシャルとを関係付ける跡公式が与えられている [15, 22]. また一方で量子カオスの分野でグッツウィラーが提出した古典カオス系の周期軌道と量子化された系のエネルギーを結ぶ跡公式がある [9]. 特に古典力学系としてビリヤード系をとりあげて跡公式を利用した結果も多数ある [7, 10, 19]. この論説では、離散的なグラフの上で問題を設定すると、上記の二つの話が同様の枠組の中で議論できることを、二つの形の跡公式を示すことで明らかにするのが目標である. 1節では連続な空間上で上に述べた二つの跡公式の紹介をし、2節でそれらの離散版についての数学的結果 [23] を述べる.

### 1.1 Hill's theory and trace formula

この節では  $\mathbf{R}^1$  上の周期的シュレーディンガー作用素について、よく知られている結果について概観する.  $V: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$  は周期1の  $C^\infty$  周期関数とし、シュレーディンガー作用素として

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1.1)$$

を  $L^2(\mathbf{R}^1)$  上で考えることにする. この作用素を  $L^2([0, 1])$  上で色々な境界条件の下で考察してみよう.

$$\begin{cases} L\phi(x) = \lambda\phi(x) \\ \phi(x+1) = e^{i\alpha}\phi(x). \end{cases} \quad (1.2)$$

ただし,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . この固有値問題で得られる固有値を

$$\lambda_0(\alpha) \leq \lambda_1(\alpha) \leq \dots \quad (1.3)$$

とおく. このとき  $\lambda_i(\alpha)$  は各  $i$  について  $\alpha$  の関数として連続になる. このあたりのことを簡単に見てみよう.

$S_\lambda = \{\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^1); L\phi = \lambda\phi\}$  とおく.  $L$  は  $L^2(\mathbf{R}^1)$  上の2階の微分作用素であることより,  $S_\lambda$  は2次元であることに注意しておく. モノドロミー作用素を  $M_\lambda\phi(x) = \phi(x+1)$  で定義すると  $V$  が周期関数であることから,  $S_\lambda$  からそれ自身への写像になる. そのトレースを

$$\Delta(\lambda) = \text{Tr} M_\lambda \quad (1.4)$$

とおき, 判別式 (discriminant) と呼ぶ. 例えば  $V \equiv 0$  のときは簡単な計算により,  $\Delta(\lambda) = 2\cos\sqrt{\lambda}$  となることがわかる. 一般に  $\Delta(\lambda)$  は  $\lambda$  の整関数で,  $\lambda \rightarrow +\infty$  で

$$\Delta(\lambda) \sim 2\cos\sqrt{\lambda} \quad (1.5)$$

となることが知られている [15]. さて,  $\det M_\lambda = 1$  であることに注意すると

$$\begin{aligned} \text{固有値問題 (1.2) が解を持つ} &\Leftrightarrow \det(M_\lambda - e^{i\alpha}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{i\alpha})^2 - \text{Tr}(M_\lambda)e^{i\alpha} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Delta(\lambda) = 2\cos\alpha \end{aligned}$$

---

\* Supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

であるので、図 1 を見れば  $\lambda_i(\alpha)$  の連続性は明らか。(さらに実解析的であることまで示すことができる.)  
さらに  $\sigma(L)$  を  $L$  のスペクトルとすると、

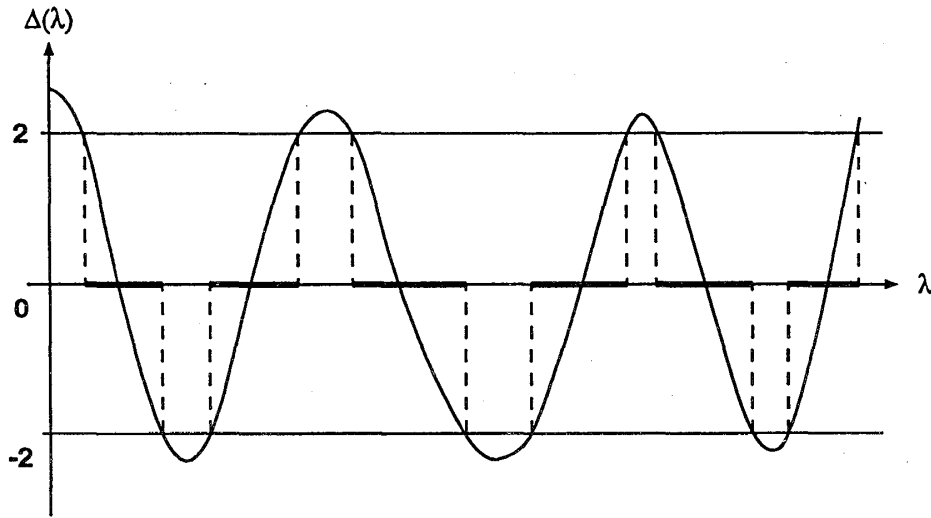


図 1: スペクトルと判別式

$$\begin{aligned}\sigma(L) &= \bigcup_{0 \leq \alpha < 2\pi} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\lambda_k(\alpha)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R}; |\Delta(\lambda)| \leq 2\}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

である [22]. この事実注意到すると、図 1 にあるようにスペクトルがギャップ構造を持ち得ることが見てとれる.

上で  $\alpha = 0$  (周期的境界条件) のときの固有値  $\{\lambda_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$  と、 $\alpha = \pi$  (反周期的境界条件) のときの固有値  $\{\lambda_k(\pi)\}_{k=0}^{\infty}$  を小さい順に並べたものをあらためて  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  とし、さらに平行移動した領域  $[s, 1+s]$  でのディリクレ問題、つまり  $L^2([s, 1+s])$  上で  $L$  を考えて  $x = s, 1+s$  でディリクレ条件を置いたときの固有値を  $\{\mu_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  とする (図 2). このとき次の定理が成立する.

定理 1.1  $V: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は周期 1 の  $C^\infty$  周期関数とすると、任意の  $s \in \mathbb{R}^1$  に対して、

$$V(s) = \lambda_0 + \sum_{n \geq 1} (\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n} - 2\mu_n(s)) \quad (1.7)$$

が成立する.

これにより 3 系列の固有値の値からポテンシャルの再構成が原理的には可能になる.

## 1.2 Gutzwiller's formula

Gutzwiller の跡公式とは何らかの意味でカオス的なハミルトン力学系の周期軌道とその量子化した系のエネルギーを結ぶ公式であると言える. グッツウィラー自身の指摘の通り、この公式の一つの指導原理はセルバーグの跡公式 [6, 11, 12, 25] と言われるもので、その 1 つの形は以下のように表すことができる.

定理 1.2 (Selberg)  $\Gamma$  は  $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\pm I$  の離散部分群で単位元以外はすべて双曲的な元からなるものとする.  $\mathbb{H}$  を上半平面として、 $M$  を  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  によって定まる負定曲率  $-1$  のコンパクトなリーマ

ン面とする。また、 $M$  上のラプラス・ベルトラミ作用素の固有値を  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  とする。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \text{vol}(M) \frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x^2/4t}}{\sinh(x/2)} dx + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma: p.p.o.} \frac{l(\gamma)}{\sinh(nl(\gamma))/2} \frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-n^2 l(\gamma)^2/4t}.$$

ただし、 $p.p.o.$  は素な閉測地線にわたる和で、 $l(\gamma)$  は  $H$  上の双曲的距離。

この定理の証明にはいくつか方法があるが、確率論的に証明する方法も有力である [12, 16]。2.2 節では離散版の Gutzwiller 型跡公式を与えるが、その証明は Selberg 跡公式の確率論的証明の本質部分だけを抽出した形になっている。

さて、以下では開ビリアード系におけるグッツウィラー跡公式に話を限定しよう。 $R^2$  内に  $n$  個の滑らかで凸な障害物  $\{O_i\}_{i=1}^n$  がそれぞれ蝕とならないように置かれているものとする、つまり、任意の異なる  $O_i$  と  $O_j$  の凸包と第 3 の  $O_k$  が共有点を持たないとする。この障害物の外部領域で点粒子の自由運動を考え、障害物の境界では弾性衝突するものとする。このときほとんどの粒子の運動の軌道は無限の遠方に逃げてしまうが、一部の軌道は過去と未来において有界領域に留まる。この無限に有界領域に留まる軌道は次のような両側無限列

$$\Sigma = \{\underline{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \{1, 2, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}; a_{i+1} \neq a_i \text{ for any } i \in \mathbb{Z}\} \quad (1.8)$$

と 1 対 1 の対応がつくことが知られている [18]。つまり、 $\{1, 2, \dots, n\}$  を障害物の番号だと思い、それに対して  $\Sigma$  の元を与えると、その順番に従って障害物に衝突する運動が一意的に定まる。(1.8) の定義の中で  $a_{i+1} \neq a_i$  となっているのはもちろん同じ障害物には続けて衝突しないからである。

さて、この設定のもとで Gutzwiller の跡公式を述べよう。 $L = -\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$  として、 $L_{free}$  は  $R^2$  全体で考えたもの、 $L_{obs}$  は  $R^2 \setminus \{O_i\}_{i=1}^n$  で考え、境界ではディリクレ条件を置くものとする。またこれらの作用素のレゾルベント作用素をそれぞれ、 $G_{\lambda}^{free}$ ,  $G_{\lambda}^{obs}$  とする。このとき、

“定理” 1.3 (Gutzwiller) 上の設定のもと、

$$\text{Tr}(G_{\lambda}^{free} - G_{\lambda}^{obs}) = g_0 + \sum_{\gamma: p.p.o.} \frac{T_{\gamma}(\lambda)}{i\hbar} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i/\hbar n S_{\gamma}(\lambda) + i n \pi L_{\gamma})}{2 \sinh(n u_{\gamma}/2)}. \quad (1.9)$$

ただし、 $g_0$  は状態密度の差、 $p.p.o.$  は素な周期軌道 (primitive periodic orbit) で、 $S_{\gamma}(\lambda)$  は  $\gamma$  に沿った作用、 $T_{\gamma}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} S_{\gamma}(\lambda)$  は周期、 $L_{\gamma}$  はマスロフ指数、 $u_{\gamma}$  はポアンカレ写像の固有値から決まる量。

これが開ビリアード系におけるグッツウィラー跡公式と呼ばれるものであり、左辺の量子力学的な量を古典力学にかかわる量で展開した形になっている。しかし、これはこのままでは収束の問題をクリアできていない。セルバーグの跡公式との違いは、作用の前に  $i = \sqrt{-1}$  があるかないかである。しかし、これは大きな違いである。

## 2 Discrete analogue

### 2.1 1.1 に対する離散アナロジー

この節では離散空間であるグラフ上で問題を設定して、(1.7) を一般化した式 (2.4) を与えて、グラフとポテンシャルが特別な場合には (1.7) と同様な形となることを示す。

$G$  は単純無限グラフとする。グラフが単純とは、自分自身に戻ってくるループと多重辺がないことをいう。(グラフの用語などについては例えば [1, 5].) 例としては  $d$ -次元正方格子  $Z^d$ , 三角格子, 六角格子, かごめ格子,  $d$ -正則樹木  $T_d$  などを考えれば十分である。 $P = \{p(x, y)\}_{x, y \in G}$  を推移確率とする。ただし、簡

単のため  $P$  としては最近接点へのジャンプだけを許すものとする。(もちろんこれは本質的ではない。) つまり,

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{m(x)} & y \in N_x \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たすものを考えることにする。ただし,  $N_x$  は点  $x$  の近傍の点集合を表し,  $m(x)$  はその個数を表す。 $G$  上の実数値関数全体の空間に内積  $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in G} m(x) f(x) g(x)$  を入れて, この内積に関する 2 乗総和可能な関数全体のなすヒルベルト空間  $\ell^2(G)$  上のラプラシアンを

$$\Delta_G f(x) = \sum_{y \in G} p(x, y) f(y) - f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in N_x} f(y) - f(x). \quad (2.2)$$

で定義する。このとき,  $\Delta_G$  は有界な対称作用素になる。またスペクトルは一般には連続スペクトルも含んでおり,

$$\text{Spec}(-\Delta_G) \subset [0, 2]$$

となることが簡単に示すことができる。(グラフ上のラプラシアンのスペクトルについては例えば [3, 17].) さて,  $V: G \rightarrow \mathbb{R}$  は実数値有界関数に対して, シュレーディンガー作用素を  $L = -\Delta_G + V$  と定義するとやはり有界な対称作用素になることに注意しておく。さてこの作用素に対して, 次の二つの問題(自由, ディリクレ境界条件)を考える。以下,  $G$  の有限部分集合  $A$  を固定する。

$$L\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad x \in G$$

と

$$\begin{cases} L_A\phi(x) = L\phi(x) = \lambda\phi(x) & x \in G \setminus A \\ L_A\phi(a) = 0 & a \in A. \end{cases}$$

ただし, これら二つの作用素の定義域はそれぞれ  $D(L) = \ell^2(G)$ ,  $D(L_A) = \{f \in \ell^2(G); f(a) = 0 \forall a \in A\}$  とする。この作用素に対するレゾルベント  $(L - \lambda)^{-1}$ ,  $(L_A - \lambda)^{-1}$  の積分核(グリーン関数)を  $g_\lambda(x, y)$ ,  $g_\lambda^A(x, y)$  とする。また,  $L, L_A$  に対応する熱方程式の基本解(熱核)をそれぞれ,  $p^V(t, x, y)$ ,  $p_A^V(t, x, y)$  とおく。さらに,  $G_\lambda^A$  を  $|A| \times |A|$  行列で成分が  $(G_\lambda^A)_{a,b} = g_\lambda(a, b)$  なるものとする。まず次の補題に注意しよう。

**補題 2.1**  $\lambda$  についての関数  $\det G_\lambda^A$  は  $\mathbb{C} \setminus \sigma(L)$  上正則で,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_0, \lambda_\infty]$  上で 0 を値としてとらない。ただし,  $\sigma(L)$  は シュレーディンガー作用素  $L$  のスペクトルで,  $\lambda_0$  と  $\lambda_\infty$  はそれぞれ  $\sigma(L)$  の下限と上限である。

さて, この正則関数  $\det G_\lambda^A$  は上の補題により,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_0, \lambda_\infty]$  においては 0 にならないので  $\log$  をとることができる。この値  $\log \det G_\lambda^A$  の虚数部分 ( $\text{Im} \log$  は偏角を与える) の実軸への境界値を考えよう。 $\lambda \in \mathbb{R}$  に対して

$$\theta_A(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|A|\pi} \text{Im} \log \det G_{\lambda+i\epsilon}^A \quad (2.3)$$

と定義する。この量は  $\theta_A(\lambda)$  は a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$  で存在する。この値を一般化された Krein's spectral shift function と呼ぶことにする。特に一次元の場合は位相の変化に関係した量である [4, 8]。以上の設定のもとで次の定理が示される。

**定理 2.2**  $V$  を実数値有界関数とする。このとき,

$$\frac{1}{|A|} \sum_{x \in G} (p^V(t, x, x) - p_A^V(t, x, x)) = e^{-\lambda_\infty t} + t \int_{\lambda_0}^{\lambda_\infty} e^{-\lambda t} \theta_A(\lambda) d\lambda$$

ただし,  $\lambda_0, \lambda_\infty$  はそれぞれ作用素  $L$  のスペクトルの下限と上限。

さらに、上定理の左辺の  $t \rightarrow 0$  での漸近挙動を調べることで、次の系を得る。

系 2.3  $V$  を実数値有界関数とする。このとき、

$$\frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} V(a) = \lambda_\infty - 1 - \int_{\lambda_0}^{\lambda_\infty} \theta_A(\lambda) d\lambda. \quad (2.4)$$

ただし、 $\lambda_0, \lambda_\infty$  はそれぞれ作用素  $L$  のスペクトルの下限と上限である。

この (2.4) が、(1.7) の一般化に相当する。 $\theta_A(\lambda)$  の性質については今のところ一般的にはまだよくわかっておらず、これから問題であるが、特に一次元に限ればランダムシュレーディンガー作用素との関連で詳しく調べられており、この系もきれいな形で書きなおすことができ、1.1 節で述べた定理 1.1 と同等の定理が得られることを示そう。

$G$  を  $\mathbb{Z}^1$ ,  $V: \mathbb{Z}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  を周期関数とする。有限集合  $A$  は一点  $\{a\}$  にとる。このとき、 $L$  のスペクトルは一般に有限個の閉区間の和集合になることが知られている。(1.1 節と同様の議論を離散の場合にやればよい。) それを  $\bigcup_{0 \leq k \leq n} [\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}]$  とする。ただし、 $\lambda_{2n+1} = \lambda_\infty$ 。また、グリーン関数  $g_\lambda(a, a)$  はレゾルベント集合  $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$  上  $\lambda$  の実数値関数で狭義単調増加だからその零点は高々一つで、それを  $\mu_k$  とする (図 2)。もし、零点がない場合はその正負に従って  $\mu_k = \lambda_{2k-1}$ ,  $\mu_k = \lambda_{2k}$  とする。まず、次の強力な定理があることを注意しておく。

定理 2.4 (小谷 [13])  $L$  のスペクトル上ほとんど到る  $\lambda$  に対して、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Reg}_{\lambda + i\epsilon}(a, a) = 0. \quad (2.5)$$

この事実とグリーン関数がレゾルベント集合上で実数値をとり単調増大であることに注意すれば次のように  $\theta_A(\lambda)$  を陽に表現できる。

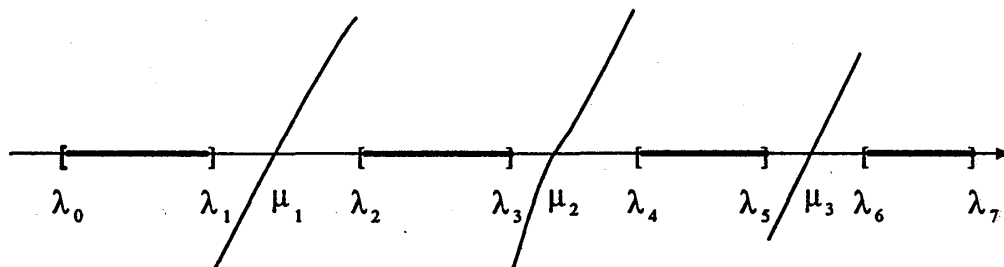


図 2: グリーン関数とスペクトル。

$$\theta_A(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda_{2k-1} < \lambda < \mu_k(a), \\ 0, & \mu_k(a) < \lambda < \lambda_{2k}, \\ \frac{1}{2}, & \lambda_{2k} < \lambda < \lambda_{2k+1}. \end{cases} \quad (2.6)$$

後は系 2.3 と簡単な積分計算から次を示すことができる。

定理 2.5  $V$  を実数値有界関数とする。このとき、

$$V(a) = \frac{\lambda_0 + \lambda_\infty}{2} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq n} (\lambda_{2k} + \lambda_{2k+1} - 2\mu_k(a)). \quad (2.7)$$

これが始めに述べた関係 (1.7) の離散アナロジーである。

## 2.2 1.2 に対する離散アナロジー

さて、定理 2.2 の証明の際に次の補題を用いている。

補題 2.6  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_0, \lambda_\infty]$  とする。このとき、

$$\sum_{x \in G} (g_\lambda(x, x) - g_\lambda^A(x, x)) = \frac{d}{d\lambda} \log \det G_\lambda^A \quad (2.8)$$

上式の右辺を展開することによって Gutzwiller 型の跡公式を導こう。そのために  $G \times G$  上の関数として

$$d_\lambda(x, y) = -\frac{1}{2} \log \frac{g_\lambda(x, y)g_\lambda(y, x)}{g_\lambda(y, y)g_\lambda(x, x)}. \quad (2.9)$$

を考える。

補題 2.7  $\lambda < \inf_{x \in G} V(x)$  とする。このとき、 $d_\lambda(x, y)$  は  $\lambda$  を 1 つ固定するごとに  $G$  上の距離となる。ここに  $G \times G$  上の関数  $d_\lambda(\cdot, \cdot)$  が距離であるとは、1)  $d_\lambda(x, y) \geq 0$  で等号は  $x = y$  のときに限る。2)  $d_\lambda(x, y) = d_\lambda(y, x)$ , 3) 三角不等式  $d_\lambda(x, y) \leq d_\lambda(x, z) + d_\lambda(z, y)$  を満たすときをいう。

一般にはこの距離を具体的に計算することは困難であるが、ここでは具体的に計算できる例を 1 つ与えておこう。

例 2.8  $G$  は  $d$ -正則樹木グラフ、 $V$  は恒等的に 0 とする。(特に 2-正則樹木グラフは  $\mathbb{Z}^1$  にほかならない。)  $\alpha_d = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}$  とおくと、よく知られているように  $-\Delta_G$  のスペクトルは  $[1 - \alpha_d, 1 + \alpha_d]$  となる。簡単な計算から  $\lambda < 0$  のとき

$$d_\lambda(x, y) = d(x, y) \cdot (-\log m_d(\lambda)) \quad (2.10)$$

となることがわかる。ただし、 $d(x, y) = \inf\{n \geq 0; p^n(x, y) > 0\}$  で定義されるもので、通常の意味のグラフの最短距離である。また

$$m_d(\lambda) = \frac{d}{2d-2} \left( 1 - \lambda - \sqrt{(1-\lambda)^2 - \alpha_d^2} \right) \quad (2.11)$$

である。特に  $\lambda \rightarrow 0$  のとき

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} d_\lambda(x, y) &= d(x, y) \cdot \log(d-1) \quad \text{if } d \geq 3, \\ (2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0-} \frac{d_\lambda(x, y)}{\sqrt{-2\lambda}} &= d(x, y) \quad \text{if } d = 2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

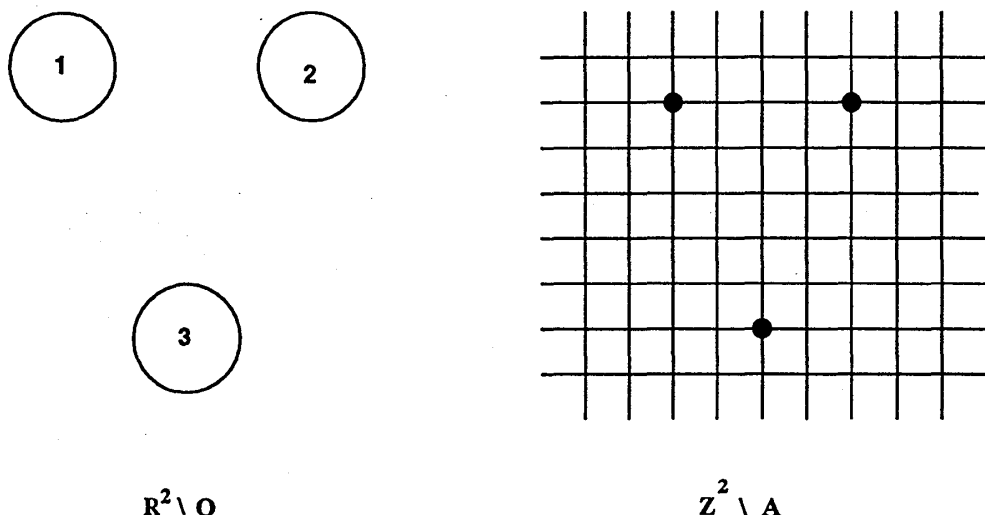
$\lambda \rightarrow -\infty$  のとき

$$d_\lambda(x, y) \sim d(x, y) \left\{ \log(1-\lambda) + \log d - \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_d}{1-\lambda} \right)^2 - \dots \right\}. \quad (2.13)$$

この距離は漸近的には  $d(x, y)$  に近いものであることがわかる。

さてグッツウィラー跡公式の離散版を考えよう。 $A = \{a_n\}_{1 \leq n \leq N}$  は  $G$  の有限部分集合とする。このとき、以下では  $G \setminus A$  を  $\mathbb{R}^d \setminus O$  (ただし、 $O = \bigcup_{1 \leq n \leq N} O_n$  は有界領域) を離散化したものであると見なすといふ。そのイメージは図 3 にある。ちなみに図 3 の右図において、黒丸で書かれた部分が  $A$  に相当する部分である。

1.2 節で  $\mathbb{R}^d \setminus O$  内の粒子の運動で有界領域に留まるものの軌道は  $O = \bigcup_{i=1}^n O_i$  にどの順番で衝突するかだけを決めれば、すなわち、 $\{1, 2, \dots, n\}$  を記号とする無限列を与えることで表現できた。このことと同様に有限部分集合  $A$  にだけ着目する。

図 3:  $\mathbb{R}^d \setminus O$  と  $G \setminus A$  のイメージ.

$A$  の記号列の中で

$$\{\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n; a_i \in A, a_{i+1} \neq a_i\} \quad (2.14)$$

の形のものは  $A$  上の周期  $n$  の周期軌道 (もしくは閉道) と対応がつく. ただし,  $a_{n+1} = a_1$ . また特に  $\underline{a}$  が  $\underline{b} = b_1 \dots b_k$  の形の周期軌道の  $l$  回の繰り返して書けるならば  $l=1$  という性質を満たすとき  $\underline{a}$  を素な周期軌道と呼ぶことにする. 素な周期軌道  $\underline{a} = a_1 a_2 \dots a_n$  に対して, その長さ (または作用)  $S_\lambda(\underline{a})$  を

$$S_\lambda(\underline{a}) = \sum_{i=1}^n d_\lambda(a_i, a_{i+1}). \quad (2.15)$$

として定義する. ただし,  $a_{n+1} = a_1$ . また  $L(\underline{a})$  をその周期と呼び,  $L(\underline{a}) = L(a_1 a_2 \dots a_n) = n$  と定義する. このとき, 次の定理が成立する.

定理 2.9 ある  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$  が存在して,  $\lambda < \bar{\lambda}$  のとき, 次のような展開がある.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(G_\lambda - G_{\lambda,A}) &= \sum_{x \in G} (g_\lambda(x, x) - g_\lambda^A(x, x)) \\ &= \sum_{a \in A} \frac{d}{d\lambda} \log g_\lambda(a, a) + \sum_{\underline{a}: p.p.o.} \frac{dS_\lambda(\underline{a})}{d\lambda} \sum_{n \geq 1} \exp(-nS_\lambda(\underline{a}) - n\pi i L(\underline{a})) \end{aligned} \quad (2.16)$$

ただし,  $g_\lambda^A(x, x)$  は  $(L_A - \lambda)^{-1}$  の積分核 (グリーン関数),  $\sum_{\underline{a}: p.p.o.}$  は有限集合  $A$  上の素な周期軌道に対する和,  $S_\lambda(\underline{a})$  は  $G$  上の距離  $d_\lambda$  で測った  $\underline{a}$  の長さ (または作用),  $L(\underline{a}) \in \mathbb{N}$  は  $\underline{a}$  の周期.

この結果と (1.9) を比較するとはっきりするが,  $2 \sinh(nu_\gamma/2)$  があるかないか, 虚数  $i = \sqrt{-1}$  があるかないかの違いはあるが, 本質的な部分は同じ形となっている. よって, 上の定理 2.9 はグッツウィラー跡公式の一つの離散アナロジー (熱方程式版) と見ることができる. この定理の証明は補題 2.6 と次の事実に注意すればよい.

$$\det G_\lambda^A = \det D_\lambda \det(I + K_\lambda).$$

ただし,  $D_\lambda$  は対角行列で

$$D_\lambda(a, b) = \begin{cases} g_\lambda(a, a) & \text{if } a = b \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.17)$$



$K_\lambda$  は

$$K_\lambda(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a = b \\ \frac{g_\lambda(a, b)}{g_\lambda(b, b)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.18)$$

となる行列である。ちなみに  $\det(I + K_\lambda)$  は今の場合、あるポテンシャルのもとでの Ruelle のゼータ関数 [2, 20] と一致している。上の定理 2.9 の展開は結局ゼータ関数の  $\log$  微分の展開となっているわけである。

## 参考文献

- [1] B. Bollobás, *Graph Theory*, Graduate Texts in Math. 63, Springer Verlag, New York, 1979.
- [2] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Note in Math. vol. 470 (1975), Springer Verlag, Berlin.
- [3] F. R. K. Chung, *Spectral Graph Theory*, Conference Board of the Mathematical Sciences Num. 92, American Mathematical Society, 1997.
- [4] W. Craig, *The Trace Formula for Schrödinger Operators on the Line*, Commun. Math. Phys. 126 (1989), 379-407.
- [5] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Math. 173, Springer Verlag, New York, 1997.
- [6] J. Fischer, *An approach to the Selberg Trace Formula via the Selberg Zeta-Function*, Lecture Notes in Math. vol. 1253 (1987), Springer.
- [7] P. Gaspard and S. A. Rice, *Semiclassical quantization of the scattering from classically chaotic repeller*, J. of Chem. Phys. 90 (1989), 2242-2254.
- [8] F. Gesztesy, H. Holden, B. Simon, *Absolute Summability of the Trace Relation for Certain Schrödinger Operators*, Commun. Math Phys. 168 (1995), 137-161.
- [9] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [10] T. Harayama and A. Shudo, *Dispersing Billiards の半古典論*, 物性研究 61-3, (1993-12), 222-281.
- [11] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for  $PSL(2, \mathbb{R})$* , Lecture Note in Math. vol. 548 (1976) and vol. 1001 (1983), Springer.
- [12] N. Ikeda and H. Matsumoto, *Brownian motion on the Hyperbolic plane and Selberg trace formula*, preprint.
- [13] S. Kotani, *One-Dimensional Random Schrödinger Operators and Herglotz Functions*, Taniguchi Symp. PMMP Katata, (1985), 219-250.
- [14] S. Kotani and B. Simon, *Stochastic Schrödinger Operators and Jacobi Matrices on the Strip*, Commun. Math. Phys. 119 (1988), 403-429.
- [15] W. Magnus and S. Winkler, *Hill's Equation*, Interscience Publishers, 1966.
- [16] H. P. McKean, *Selberg's trace formula as applied to a compact surface*, Comm. Pure. Appl. Math. 25 (1972), 225-246.
- [17] B. Mohar and W. Woess, *A survey of spectra of infinite graphs*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 209-234.

- [18] T. Morita, *The symbolic representation of billiards without boundary condition*, Trans. A. M. S. 325 (1991), 819-828.
- [19] K. Nakamura, *カオスと量子物理学*, サイエンス社, 1997.
- [20] W. Parry and M. Pollicott, *Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque 187-188, 1990.
- [21] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous subgroups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47-87.
- [22] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics vol.IV.*, Academic Press, New York, 1980.
- [23] T. Shirai, *A Trace Formula for Discrete Schrödinger Operators*, to appear.
- [24] F. Spitzer, *Principles of Random Walks*, Springer, 1964.
- [25] T. Sunada, *基本群とラプラシアン*, 紀伊国屋書店, 1988.
- [26] K. Yoshida, *Lectures on Differential and Integral Equations*, Dover Publication, 1960.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606, Japan

E-mail: shirai@kurims.kyoto-u.ac.jp